

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ
ARKUSZ II – POZIOM ROZSZERZONY

Nr zadania	Etapy rozwiązania zadania	Maksymalna liczba punktów za dany etap
11. (4 pkt)	1. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $W(3,4)$.	1p.
	2. Obliczenie wartości $f(0) = -5$.	1p.
	3. Obliczenie wartości $f(7) = -12$.	1p.
	4. Zapisanie odpowiedzi: Funkcja f w przedziale $\langle 0;7 \rangle$ osiąga największą wartość równą 4, zaś najmniejszą równą (-12) .	1p.
12. (4 pkt)	5. Przekształcenie danego równania do postaci np. równania: $x(a-1)(a+1) = a+1$	1p.
	6. Zapisanie, że dla $a = 1$ dane równanie nie ma żadnego rozwiązania.	1p.
	7. Zapisanie, że dla $a = -1$ dane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.	1p.
	8. Zapisanie, że dla $a \neq 1$ i $a \neq -1$ dane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.	1p.
13. (4 pkt)	9. Zapisanie, że warunkiem koniecznym ciągłości danej funkcji w punkcie $x = 2$ jest istnienie skończonej granicy w tym punkcie. Uzasadnienie, że dwumian $(x-2)$ jest dzielnikiem dwumianu $(x^2 + a)$, zatem parametr a przyjmuje wartość: $a = -4$. (1 punkt przyznajemy za podanie odpowiedzi $a = -4$ bez uzasadnienia)	2p.
	10. Obliczenie granicy danej funkcji w punkcie $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.	1p.
	11. Porównanie obliczonej granicy z wartością funkcji g w punkcie $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 = g(2) = b$ oraz zapisanie odpowiedzi: Funkcja g jest ciągła w punkcie $x = 2$ gdy $a = -4$ oraz $b = 4$.	1p.
14. (5 pkt)	12. Zapisanie, że $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2n + 4$	2p.
	13. Obliczenie n -tego wyrazu ciągu: $a_n = 2n + 2$.	1p.
	14. Zapisanie różnicy dwóch dowolnych, kolejnych wyrazów tego ciągu: $r = a_{n+1} - a_n$	1p.
	15. Obliczenie różnicy ciągu i stwierdzenie, że jest to ciąg arytmetyczny.	1p.
15. (5 pkt)	16. Oznaczenie pierwszego wyrazu tego ciągu, np. przez a_1 oraz ilorazu, np. przez q i zapisanie, że $a_1 \cdot q^9 = 10$.	1p.
	17. Doprowadzenie iloczynu dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $a_1^{19} \cdot q^{1+2+\dots+18}$.	1p.
	18. Przekształcenie iloczynu dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $a_1^{19} \cdot q^{19 \cdot 9}$.	1p.
	19. Przekształcenie iloczynu dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $(a_1 \cdot q^9)^{19}$	1p.
	20. Zapisanie odpowiedzi: Iloczyn dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu jest równy 10^{19} .	1p.

16. (4 pkt)	21. Zauważenie i zapisanie, że dane doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu $p = \frac{1}{6}$, prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{5}{6}$, liczba prób $N = 5$, liczba sukcesów $k \geq 4$.	1p.
	22. Zapisanie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia w postaci: $P_5(k \geq 4) = P_5(k = 4) + P_5(k = 5)$.	1p.
	23. Wykorzystanie wzorów i zapisanie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia w postaci: $P_5(k \geq 4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0$.	1p.
	24. Poprawne obliczenie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia: $P_5(k \geq 4) = \frac{25}{7776} + \frac{1}{7776} = \frac{26}{7776} = \frac{13}{3888} \approx 0,00334$.	1p.
17. (5 pkt)	25. Zapisanie warunku (1) $\vec{CA} \circ \vec{CB} = 0$, gdzie $C(0, y)$.	1p.
	26. Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{CA} = [-9, -2 - y]$.	1p.
	27. Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{CB} = [4, 2 - y]$.	1p.
	28. Obliczenie iloczynu skalarnego wektorów \vec{CA} i \vec{CB} : $-36 - (2 - y) \cdot (2 + y)$	1p.
	29. Rozwiązanie równania (1) i zapisanie odpowiedzi: Istnieją dwa takie punkty: $C(0, 2\sqrt{10})$ lub $C(0, -2\sqrt{10})$.	1p.
18. (4 pkt)	30. Sporządzenie rysunku i zaznaczenie na nim szukanego kąta.	1p.
	31. Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie równania np. $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos \alpha$, gdzie a - długość krawędzi sześcianu, zaś α - miara kąta ostrego między przekątnymi sześcianu	2p.
	32. Obliczenie wartości cosinusa kąta ostrego: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. (Albo: $\cos \beta = -\frac{1}{3}$ gdzie β jest kątem rozwartym).	1p.
19. (5 pkt)	33. Wykorzystanie faktu istnienia okręgu wpisanego w dany trapez i zapisanie, że suma długości podstaw a i b trapezu jest równa 10 cm .	2p.
	34. Zauważenie i zapisanie, że wysokość trapezu, opuszczona z wierzchołka kąta rozwartego, dzieli dłuższą podstawę na odcinki o długościach: $\frac{a+b}{2}$ oraz $\frac{a-b}{2}$.	1p.)
	35. Obliczenie długości wysokości trapezu: $h = 4 \text{ cm}$.	1p.
	36. Obliczenie pola danego trapezu: $P = 20 \text{ cm}^2$.	1p.
20. (10 pkt)	37. Wyznaczenie warunków określających dziedzinę równania $h(x) - \log_2 k = 0: x > 5$ i $k > 0$.	2p.
	38. Przekształcenie równania $h(x) - \log_2 k = 0$ do postaci: $\frac{x^2 - 4}{x - 5} = k$	1p.
	39. Przekształcenie równania do postaci: $x^2 - kx + 5k - 4 = 0$.	1p.

	40. Zapisanie układu warunków $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_w > 5 \\ f(5) > 0 \end{cases}$, gdzie x_w oznacza odciętą wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $f = x^2 - kx + 5k - 4$, przy pewnej wartości k .	1p.
	41. Obliczenie wyróżnika trójmianu: $\Delta = k^2 - 20k + 16$.	1p.
	42. Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $\Delta > 0 \Leftrightarrow k \in (-\infty; 10 - 2\sqrt{21}) \cup (10 + 2\sqrt{21}; \infty)$.	1p.
	43. Rozwiązanie nierówności $x_w > 5$: $k \in (10; \infty)$.	1p.
	44. Sprawdzenie, że warunek $f(5) > 0$ zachodzi dla każdej rzeczywistej wartości parametru k .	1p.
	44. Zapisanie odpowiedzi, uwzględniającej zbiór rozwiązań układu nierówności z p.40 oraz warunku $k > 0$: Dla wszystkich $k \in (10 + 2\sqrt{21}; \infty)$ równanie $h(x) - \log_2 k = 0$ ma dwa różne pierwiastki.	1p.
21. (10 pkt)	45. Zapisanie zależności między zmiennymi: $\frac{R}{H-R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$.	1p.
	46. Wyznaczenie jednej zmiennej z powyższej zależności, np. $r^2 = \frac{16H}{H-8}$.	1p.
	47. Wyznaczenie objętości stożka, jako funkcji jednej zmiennej: $V(H) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16H^2}{H-8}$.	1p.
	48. Wyznaczenie dziedziny funkcji $V(H)$: $D_V = (8; \infty)$.	1p.
	49. Obliczenie pochodnej funkcji objętości: $V'(H) = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{H(H-16)}{(H-8)^2}$, $D_{V'} = D_V$.	1p.
	50. Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji objętości: $H = 16$.	1p.
	51. Zbadanie znaku pochodnej funkcji objętości: $V'(H) > 0 \Leftrightarrow H \in (16; \infty)$ oraz $V'(H) < 0 \Leftrightarrow H \in (8; 16)$.	1p.
	52. Stwierdzenie i zapisanie, że dla $H = 16$ funkcja V osiąga lokalne minimum równe $V(16) = \frac{512\pi}{3}$.	1p.
	53. Uzasadnienie, że minimum lokalne funkcji objętości stożka jest wartością najmniejszą tej funkcji, np. poprzez powołanie się na dwa fakty: $\lim_{H \rightarrow 8^+} V(H) = +\infty$ oraz $\lim_{H \rightarrow \infty} V(H) = +\infty$.	1p.
	54. Podanie wymiarów stożka o najmniejszej objętości opisanego na kuli o promieniu $R = 4 \text{ cm}$: wysokość stożka, $H = 16 \text{ cm}$, promień podstawy stożka $r = 4\sqrt{2} \text{ cm}$.	1p.

Uwaga:

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą (zgodną z poleceniem) od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.