Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

Miejsce na nalepkę
z kodem szkoły

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II
Czas pracy 150 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Proszę sprawdzić, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron. Ewentualny brak należy zgłosić przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi należy zapisać czytelnie w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. Proszę pisać tylko w kolorze czarnym; nie pisać ołówkiem.
4. W rozwiązaniach zadań trzeba przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Nie wolno używać korektora.
6. Błędne zapisy trzeba wyraźnie przekreślić.
7. Brudnopis nie będzie oceniany.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.`
9. Podczas egzaminu można korzystać z udostępnionego zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora. Nie można korzystać z kalkulatora graficznego.

Życzymy powodzenia!

Wpisuje egzaminator / nauczyciel sprawdzający pracę

Nr. zadania	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	**SUMA**
Maksymalna liczba punktów	4	6	3	4	5	5	6	5	7	5	50
Uzyskana liczba punktów											

Zadanie 12. (4 *pkt*)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *a*, *b*, *c* funkcja:

$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 13. (*6 pkt*)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których każda liczba spełniająca równanie:

$$\log_m^2(x-1)+\log_m(x-1)-2=0$$

jest mniejsza od 3.

Zadanie 14. (*3 pkt*)

Wykaż, że jeśli $a \neq b$, to równanie: $x^2 + y^2 + ax + by + \frac{a \cdot b}{2} = 0$ jest równaniem okręgu. Wyznacz współrzędne środka i długość promienia tego okręgu.

Zadanie 15. (*4 pkt*)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem:

$$f(x) = \sin 2x + \cos(\frac{p}{6} - 2x) \ .$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 16. (*5 pkt*)

W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj figurę F, gdzie:

$$F = \{(x; y) : x \in R \wedge y \in R \wedge 3|x| + |y| \leq 2\}.$$

Oblicz pole figury F.

Zadanie 17. (5 *pkt*)

Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta i oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka tego kąta.

b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 18. (*6 pkt*)

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu 9 dm^2 . Dwie ściany boczne ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami $\frac{p}{3}$ i $\frac{p}{6}$.

a) Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim dane kąty.
b) Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 19. (*5 pkt*)

W pierwszej loterii jest n ($n > 2$) losów, w tym jeden los wygrywający. W drugiej loterii $2n$ losów, w tym dwa wygrywające. W której z loterii należy kupić dwa losy, aby mieć większą szansę wygranej ? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 20. (*7 pkt*)

Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą mniejszą od 1. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$ wiedząc, że $a_{51} = 1$.

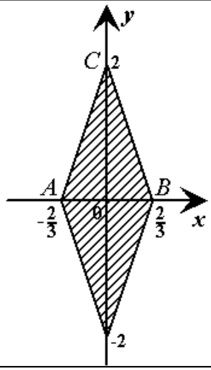
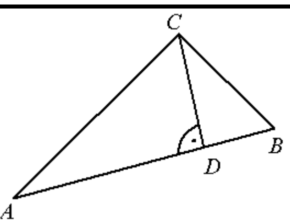
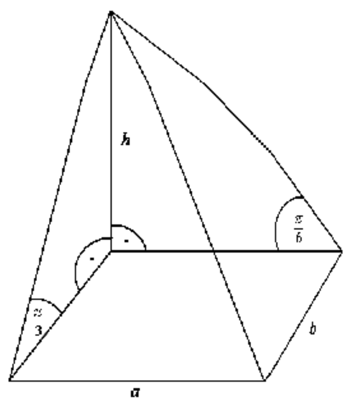
Zadanie 21. (*5 pkt*)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste spełniające równanie: $(5-x)^{x^3-4x^2+x+6}=1$.

@2 **Brudnopis**

SCHEMAT OCENIANIA ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO II

Nr zadania		Etapy rozwiązania zadania:	Modelowy wynik etapu	Liczba punktów
12	12.1	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci ogólnej funkcji kwadratowej.	$f(x)=3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)$	1
	12.2	Wyznaczenie wyróżnika funkcji kwadratowej (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za przekształcenia).	$\Delta=2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$	2
	12.3	Uzasadnienie, że wyróżnik jest nieujemny.	$\Delta\geq 0$ dla dowolnych rzeczywistych a,b,c stąd funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe	1
13	13.1	Zapisanie warunków jakie muszą być spełnione, aby wyrażenie $\log_m(x-1)$ miało sens.	$x\in(1;+\infty)$ i $m\in(0;1)\cup(1;+\infty)$	1
	13.2	Zapisanie alternatywy równań logarytmicznych równoważnej danemu równaniu.	$\log_m(x-1)=1$ lub $\log_m(x-2)=-2$	1
	13.3	Rozwiązanie alternatywy równań logarytmicznych w zależności od parametru *m*.	$x=m+1$ lub $x=1+\frac{1}{m^2}$	1
	13.4	Zapisanie warunków, dla których każda liczba spełniająca równanie jest mniejsza od 3.	$1\langle m+1\langle 3$ i $1\langle 1+\frac{1}{m^2}\langle 3$	1
	13.5	Wyznaczenie wszystkich wartości parametru *m* spełniających warunki zadania (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	$m\in(\frac{\sqrt{2}}{2};1)\cup(1;2)$	2
14	14.1	Przekształcenie podanego równania.	$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=(\frac{a-b}{2})^2$	1
	14.2	Uzasadnienie, że otrzymane równanie jest równaniem okręgu.	Ponieważ $a\neq b$, to $(\frac{a-b}{2})^2\rangle 0$. Otrzymane równanie przedstawia okrąg.	1
	14.3	Wyznaczenie współrzędnych środka i długości promienia okręgu.	$S=(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$, $r=\frac{\lvert a-b\rvert}{2}$	1
15	15.1	Przekształcenie wzoru funkcji po zastosowaniu wzorów redukcyjnych.	$f(x)=\sin 2x+\sin\left[\frac{p}{2}-(\frac{p}{6}-2x)\right]$ lub $f(x)=\cos(\frac{p}{2}-2x)+\cos(\frac{p}{6}-2x)$	1
	15.2	Przekształcenie wzoru funkcji po zastosowaniu wzoru na sumę sinusów lub kosinusów.	$f(x)=\sqrt{3}\sin(\frac{p}{6}+2x)$ lub $f(x)=\sqrt{3}\cos(\frac{p}{3}-2x)$	1
	15.3	Wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (w tym 1 p. za podanie wartości oraz 1 p. za uzasadnienie).	Najmniejsza wartość: $m=-\sqrt{3}$ Największa wartość: $M=\sqrt{3}$	2

16	16.1	Ułożenie alternatywy układów nierówności opisującej figurę *F* (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ -3x + y \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ -3x - y \leq 2 \end{cases}$	2
	16.2	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków figury *F*.	$(-\frac{2}{3};0);(\frac{2}{3};0);(0;2);(0;-2)$	1
	16.3	Sporządzenie rysunku i zaznaczenie figury *F*.		1
	16.4	Obliczenie pola figury *F*.	$P_F = 2P_{\Delta ABC} = \|AB\| \cdot \|OC\|$, $P_F = \frac{8}{3}$	1
17	17.1	Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub opis oznaczeń.	 $\|AB\| = 3\sqrt{2}$ $\|AC\| = 3 - \sqrt{3}$ $\|BC\| = 2\sqrt{3}$	1
	17.2	Wyznaczenie miary największego kąta.	$\cos\angle C = \frac{\|AC\|^2 + \|BC\|^2 - \|AB\|^2}{2\|AC\| \cdot \|BC\|} = -\frac{1}{2}$ $\|\angle C\| = 120^0$	1
	17.3	Obliczenie pola trójkąta.	$P_{ABC} = \frac{1}{2}\|AC\| \cdot \|BC\| \sin \angle C = \frac{3}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)$	1
	17.4	Obliczanie długości wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta rozwartego.	$\|CD\| = \frac{2P_{\Delta ABC}}{\|AB\|} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$	1
	17.5	Obliczanie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie.	$R = \frac{\|AB\|}{2\sin \angle C} = \sqrt{6}$	1
18	18.1	Sporządzenie rysunku wraz z zaznaczeniem danych kątów.		1
	18.2	Wyznaczenie długości boków prostokąta w zależności od *h*.	$a = hctg\frac{p}{3}, b = hctg\frac{p}{6}$	1

	18.3	Wykazanie, że $a\cdot b=h^2$ (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	$a\cdot b=h^2 ctg\frac{p}{3}ctg\frac{p}{6}=h^2 tg\frac{p}{6}ctg\frac{p}{6}=h^2$	2
	18.4	Obliczenie wysokości ostrosłupa.	$h=3$ dm	1
	18.5	Obliczenie objętości ostrosłupa.	$V=9$ dm^3	1
19	19.1	Opis zdarzeń losowych.	Np.: A – zdarzenie polegające na otrzymaniu wygranej na pierwszej loterii, B - zdarzenie polegające na otrzymaniu wygranej na drugiej loterii.	1
	19.2	Obliczenie prawdopodobieństwa wygranej w pierwszej loterii.	$P(A)=\frac{2}{n}$	1
	19.3	Obliczenie prawdopodobieństwa przegranej w drugiej loterii.	$P(B')=\frac{(2n-3)(n-1)}{(2n-1)n}$	1
	19.4	Obliczenie prawdopodobieństwa wygranej w drugiej loterii.	$P(B)=\frac{4n-3}{(2n-1)n}$	1
	19.5	Porównanie otrzymanych prawdopodobieństw.	Rozwiązanie jednej z nierówności: $P(A)\rangle P(B)$ albo $P(A)\langle P(B)$ i wywnioskowanie, że $P(A)\rangle P(B)$	1
20	20.1	Analiza zadania i wprowadzenie oznaczeń.	Np. x – różnica ciągu arytmetycznego $a_1=1-50x$	1
	20.2	Wyznaczenie a_{49}, a_{50} w zależności od x.	$a_{49}=1-2x, a_{50}=1-x$	1
	20.3	Zapisanie wyrażenia $\frac{a_1\cdot a_{49}}{a_{50}}$ jako funkcji jednej zmiennej i podanie jej dziedziny.	$f(x)=\frac{(1-50x)(1-2x)}{1-x}$, $x\in(-\infty;1)$	1
	20.4	Obliczenie pochodnej funkcji f.	$f^{'}(x)=\frac{-100x^2+200x-51}{(1-x)^2}, x\in(-\infty;1)$	1
	20.5	Rozwiązanie równania $f^{'}(x)=0$.	$x=\frac{3}{10}$	1
	20.6	Uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji f (zbadanie monotoniczności funkcji f w przedziale $(-\infty;1)$).	Funkcja f: maleje dla $x\in\left(-\infty;\frac{3}{10}\right)$, rośnie dla $x\in\left(\frac{3}{10};1\right)$, dla $x=\frac{3}{10}$ przyjmuje najmniejszą wartość	1
	20.7	Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji f.	$f\left(\frac{3}{10}\right)=-8$	1
21	21.1	Wykorzystanie definicji potęgi o wykładniku równym zero.	$x^3-4x^2+x+6=0$ dla $x\neq 5$ (*)	1
	21.2	Rozwiązanie równania (*) (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	$x_1=-1, x_2=2, x_3=3$	2
	21.3	Analiza równania dla $x=4$.	Liczba spełniająca równanie: $x_4=4$	1
	21.4	Analiza równania dla $x=6$.	Liczba spełniająca równanie: $x_5=6$	1

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.