Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

Miejsce na nalepkę
z kodem szkoły

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI OKE Wrocław – Grudzień 2004

Arkusz I

Czas pracy 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Proszę sprawdzić, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 11 stron. Ewentualny brak należy zgłosić przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi należy zapisać czytelnie w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. Proszę pisać tylko w kolorze czarnym; nie pisać ołówkiem.
4. W rozwiązaniach zadań trzeba przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Nie wolno używać korektora.
6. Błędne zapisy trzeba wyraźnie przekreślić.
7. Brudnopis nie będzie oceniany.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
9. Podczas egzaminu można korzystać z załączonego zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora. Nie można korzystać z kalkulatora graficznego.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**.

Zadanie 1. *(6 pkt)*

Poniżej rozpoczęto szkicowanie wykresu funkcji f określonej wzorem

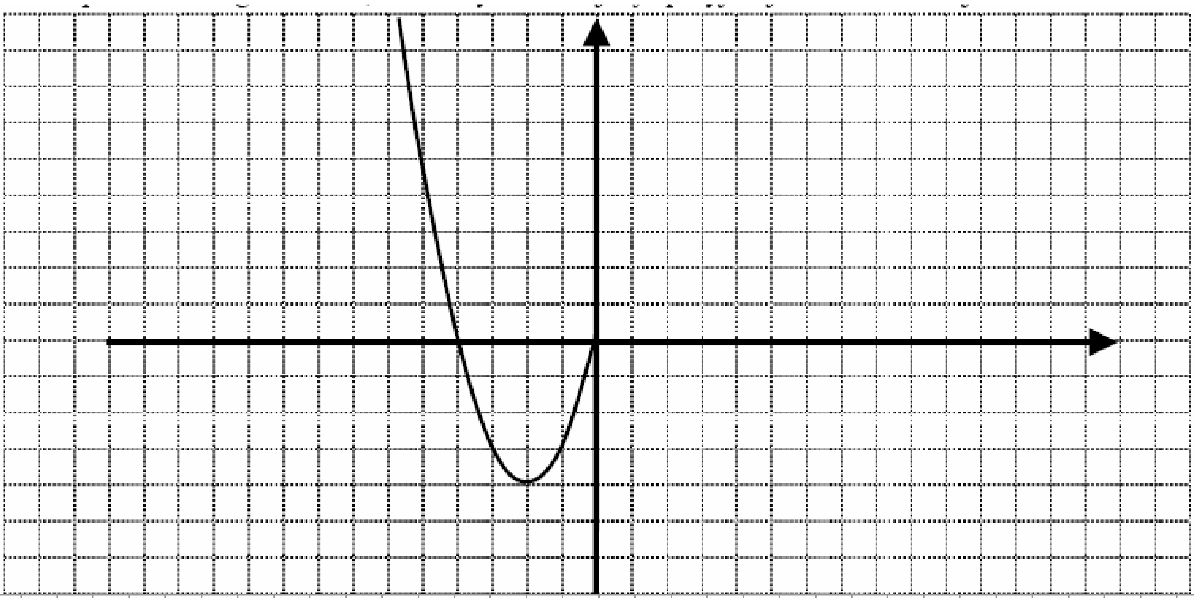
$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x & dla\ x\le 0 \\ 1+\dfrac{1}{x} & dla\ x>0 \end{cases}$$

a. Dokończ szkicowanie wykresu tej funkcji.

b. Korzystając z wykresu odczytaj i zapisz zbiór wartości funkcji f.

c. Oblicz wartość tej funkcji dla argumentu $x=-\sqrt{2}$.

d. Zapisz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.



Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $\sqrt{5}\cdot(x+1)\geq 2x+3$.

Zbiór rozwiązań tej nierówności zapisz w postaci $x\geq a\sqrt{5}+b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

Zadanie 3. ***(3 pkt)***

W pierwszym miesiącu sprzedaży nowego modelu telefonu komórkowego klienci kupili n sztuk takich telefonów w cenie c złotych za każdą sztukę. Uzyskano w ten sposób przychód ze sprzedaży równy $(n\cdot c)$ złotych. Oblicz, o ile procent zwiększyłby się przychód w pierwszym miesiącu sprzedaży tego telefonu, gdyby jego cena c była niższa o 25%, zaś liczba n klientów większa o $\frac{2}{5}$.

Zadanie 4. *(4 pkt)*
Sprawdź, że wielomian $W(x)=2x^3-7x^2-24x+45$ dzieli się bez reszty przez dwumian $(x+3)$, a następnie zapisz dany wielomian w postaci iloczynu trzech czynników liniowych ze współczynnikami całkowitymi.

Zadanie 5. *(3 pkt)*
Napisz wzór dowolnej liczby całkowitej c, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Uzasadnij, że dzieląc przez 4 kwadrat liczby c, również otrzymamy resztę równą 1.

Zadanie 6. *(7 pkt)*

Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) równa się 15, a piętnasty wyraz tego ciągu jest równy (-9).

a. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu, jego różnicę oraz wzór ogólny opisujący n - ty wyrazu ciągu (a_n).

b. Zapisz wzór sumy n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n) w postaci iloczynowej. Oblicz największą wartość tej sumy.

Zadanie 7. *(3 pkt)*

Aby wyznaczyć równanie symetralnej odcinka AB, gdzie A(1, 2) i B(–5, 6) można skorzystać z następującej własności symetralnej:

punkt S leży na symetralnej odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy $|SA| = |SB|$.

Postępujemy zatem następująco:

- zakładamy, że dowolny punkt S symetralnej odcinka AB ma współrzędne $S(x, y)$ i wyznaczamy odległości: $|SA| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ oraz $|SB| = \sqrt{(x+5)^2 + (y-6)^2}$,
- rozwiązujemy równanie $|SA| = |SB|$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-6)^2}$$

$$\text{czyli } (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+5)^2 + (y-6)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 12y + 36$$

$$-12x + 8y - 56 = 0 \quad \Big| : (-4)$$

$$3x - 2y + 14 = 0$$

- otrzymana równość określa liniową zależność między współrzędnymi punktu leżącego na symetralnej odcinka AB, jest zatem szukanym równaniem symetralnej danego odcinka.

Przeanalizuj ten przykład, a następnie, stosując przedstawioną metodę wyznacz równanie symetralnej odcinka, którego końcami są punkty: A(–3, 6) oraz B(9, 2).

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Dane są dwie różne proste równoległe k, l.

Zbiór A składa się z 7 punktów, spośród których 4 leżą na prostej k i 3 leżą na prostej l.

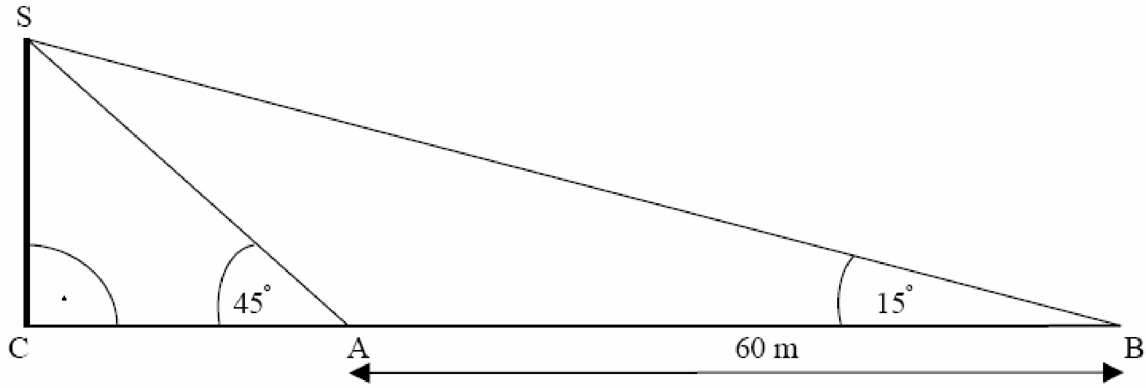
Oblicz, ile jest:

a. odcinków niezerowych, których oba końce należą do zbioru A,

b. trójkątów, których wszystkie wierzchołki należą do zbioru A.

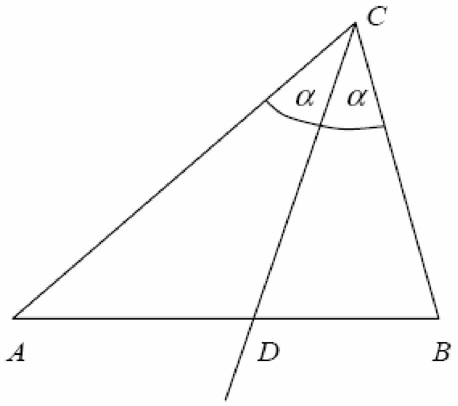
Zadanie 9. *(6 pkt)*

Szczyt S pewnej wieży jest widoczny z powierzchni Ziemi pod kątem 15° (rysunek poniżej). Po przejściu 60 metrów w kierunku tej wieży (na rysunku odpowiada to drodze od punktu B do punktu A) szczyt S jest widoczny z powierzchni Ziemi pod kątem 45°. Ułóż odpowiednie równanie i oblicz wysokość tej wieży. W obliczeniach przyjmij, że $tg\,15^\circ = 0{,}2679$. Wynik końcowy podaj z dokładnością do 0,01 m.



Zadanie 10. *(4 pkt)*
W dowolnym trójkącie jest prawdziwe następujące twierdzenie (czasem nazywane twierdzeniem o podziale boku trójkąta dwusieczną kąta wewnętrznego):

Jeżeli w trójkącie wykreślimy dwusieczną jednego z kątów wewnętrznych, to podzieli ona bok przeciwległy temu kątowi na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.



Przyjmując oznaczenia jak na rysunku, zapiszemy to twierdzenie symbolicznie:

$$\text{jeśli } |\angle ACD| = |\angle BCD|, \text{ to } \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

Stosując podane twierdzenie, oblicz długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym, w którym przeciwprostokątna ma długość 15 cm, zaś dwusieczna jednego z kątów ostrych tego trójkąta podzieliła przyprostokątną w stosunku 1 : 3. Sporządź odpowiedni rysunek.

Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość a.

a. Sporządź rysunek tego ostrosłupa i zaznacz na nim kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Oznacz ten kąt jako α. Oblicz kosinus kąta α, a następnie, korzystając z odpowiednich własności funkcji kosinus, uzasadnij, że $\alpha < 60^\circ$.

b. Wyznacz długość wysokości tego ostrosłupa oraz jego objętość.

BRUDNOPIS

BRUDNOPIS