Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

Miejsce na nalepkę
z kodem szkoły

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI

Arkusz I
Czas pracy 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Proszę sprawdzić, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron. Ewentualny brak należy zgłosić przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi należy zapisać czytelnie w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. Proszę pisać tylko w kolorze czarnym; nie pisać ołówkiem.
4. W rozwiązaniach zadań trzeba przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Nie wolno używać korektora.
6. Błędne zapisy trzeba wyraźnie przekreślić.
7. Brudnopis nie będzie oceniany.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
9. Podczas egzaminu można korzystać z udostępnionego zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora. Nie można korzystać z kalkulatora graficznego.

Życzymy powodzenia!

Wpisuje egzaminator / nauczyciel sprawdzający pracę

Nr. zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	**SUMA**
Maksymalna liczba punktów	4	4	5	4	4	4	3	4	5	6	7	50
Uzyskana liczba punktów												

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Janek ma w tym semestrze następujące oceny z języka polskiego: 5, 5, 3, 4, 3, 3, 4.

a) Oblicz średnią ocen Janka z języka polskiego. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01.

Zadanie 2. (*4 pkt*)

Pożyczkę w wysokości 8700 zł zaciągniętą w banku należy spłacić w 12 ratach, z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Oblicz wysokość pierwszej i ostatniej raty.

Zadanie 3. (*5 pkt*)

Funkcja *f* jest określona wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + 1$ dla $x \in R$.

a) Wyznacz wzór tej funkcji tak, aby $f(1) = 2$ i $f(2) = -1$.

b) Dla wyznaczonych wartości współczynników a i b rozwiąż nierówność: $f(x) \rangle 1$.

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Aby wyznaczyć równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-1;4)$, $B(3;-2)$ postępujemy w następujący sposób:

- wybieramy dowolny punkt $P(x;\,y)$ należący do symetralnej odcinka AB i korzystamy z własności symetralnej odcinka: $|AP| = |BP| \Leftrightarrow |AP|^2 = |BP|^2$
- ponieważ $|AP|^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$ oraz $|BP|^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2$, więc
  $$(x+1)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2$$
- przekształcamy otrzymane równanie do prostszej postaci i otrzymujemy równanie: $2x - 3y + 1 = 0$, które jest równaniem symetralnej odcinka AB.

Postępując w analogiczny sposób, wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach: $C(4;6)$, $D(6;-2)$.

Zadanie 5. (*4 pkt*)

Wielkość prostokątnego ekranu telewizora określa długość jego przekątnej wyrażona w calach. Oblicz, o ile procent zwiększymy powierzchnię ekranu, jeśli długość przekątnej wynoszącą 21 cali powiększymy do 32 cali zachowując stosunek długości boków prostokąta. Wynik podaj z dokładnością do 0,1%.

Zadanie 6. (*4 pkt*)

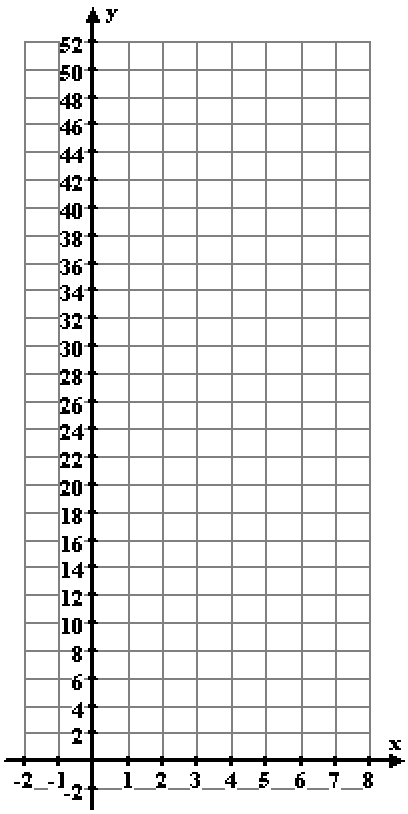
Ciąg (a_n) określony jest wzorem: $a_n = n^3 - 10n^2 + 31n - 30$. Wiedząc, że $a_2 = 0$ wyznacz wszystkie pozostałe wyrazy tego ciągu równe zero.

Zadanie 7. (*3 pkt*)

Dana jest funkcja określona za pomocą zbioru par uporządkowanych:

$$\left\{\left(x, x^2+1\right):\ x \in N_+ \ i \ x \le 7\right\}$$

a) Sporządź wykres tej funkcji i określ jej zbiór wartości.
b) Wyznacz wszystkie argumenty dla których funkcja przyjmuje wartość 37.

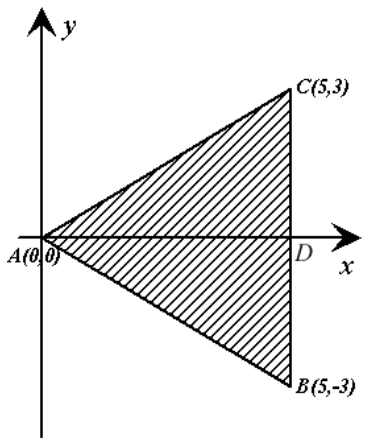


Zadanie 8. (*4 pkt*)

Metalową kulę o promieniu długości 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość mają długości odpowiednio 16 cm i 12 cm, przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Oblicz wysokość tego walca.

Zadanie 9. (*5 pkt*)

Opisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich punktów należących do trójkąta *ABC* przedstawionego na rysunku. Oblicz pole tego trójkąta.



Zadanie 10. (*6 pkt*)

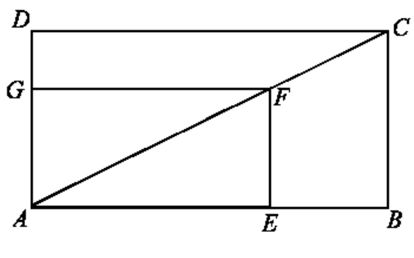
W pudełku znajdują się żetony. Wśród nich jest 6 żetonów o nominale 5 zł oraz n żetonów o nominale 10 zł. Losujemy z pudełka dwa żetony. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu obu żetonów o nominale 10 zł jest równe $\frac{1}{2}$. Oblicz n.

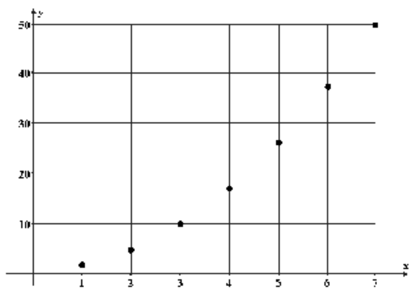
Zadanie 11. (*7 pkt*)

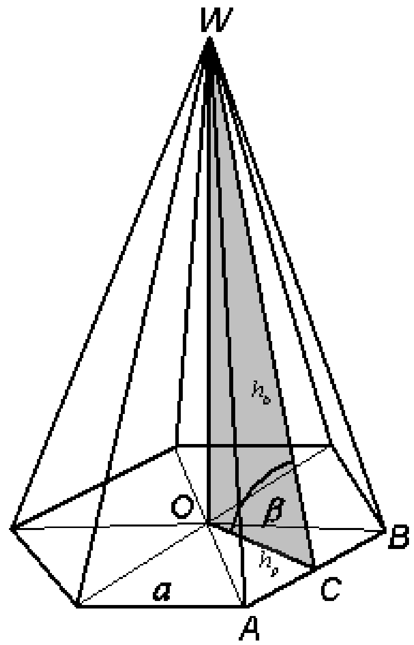
Wyznacz miarę kąta między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wiedząc, że pole jego podstawy jest równe $6\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 12. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim szukany kąt.

@2 **Brudnopis**

SCHEMAT OCENIANIA ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO I

Numer zadania		Etapy rozwiązania zadania	Modelowy wynik etapu	Liczba punktów
1	1.1	Obliczenie średniej ocen z języka polskiego.	$\bar{x} \approx 3{,}86$	1
	1.2	Obliczenie wariancji (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	0,69	2
	1.3	Obliczenie odchylenia standardowego.	0,83	1
2	2.1	Opisanie ciągu arytmetycznego określającego daną sytuację.	$a_1 = x, a_{12} = x + 11r, r = -50,$ $S_{12} = 8700$	1
	2.2	Zapisanie równania z wykorzystaniem wzoru na sumę 12 wyrazów ciągu arytmetycznego.	$(2x - 550) \cdot 6 = 8700$	1
	2.3	Rozwiązanie równania i wyznaczenie pierwszej i ostatniej raty (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	$a_1 = 1000,\ a_{12} = 450$	2
3	3.1	Zapisanie układu równań opisującego warunki zadania.	$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ 4a + 2b + 1 = -1 \end{cases}$	1
	3.2	Rozwiązanie układu równań oraz zapisanie wzoru funkcji kwadratowej (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	$a = -2,\ b = 3$ $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$	2
	3.3	Rozwiązanie nierówności (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia).	$x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$	2
4	4.1	Wykorzystanie własności symetralnej odcinka *CD*.	$\lvert CP\rvert = \lvert DP\rvert \Leftrightarrow \lvert CP\rvert^2 = \lvert DP\rvert^2$	1
	4.2	Wyznaczenie $\lvert CP\rvert^2$ i $\lvert DP\rvert^2$.	$\lvert CP\rvert^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2$ $\lvert DP\rvert^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2$	1
	4.3	Ułożenie równania.	$(x-4)^2 + (y-6)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2$	1
	4.4	Przekształcenie równania do prostszej postaci i zapisanie równania symetralnej odcinka *CD*.	$x - 4y + 3 = 0$	1
5	5.1	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń.	 $\lvert AF\rvert = 21 cali, \lvert AC\rvert = 32 cale$	1
	5.2	Zastosowanie podobieństwa trójkątów: *ABC* i *AEF* do wyznaczenia skali podobieństwa *k*.	$k = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AF\rvert} = \frac{32}{21}$	1
	5.3	Obliczenie stosunku pól powierzchni ekranów.	$\frac{P_2}{P_1} = k^2 = \left(\frac{32}{21}\right)^2 \approx 2{,}322$	1
	5.4	Wyrażenie różnicy pól powierzchni ekranów w procentach.	132,2%	1

6	6.1	Ułożenie równania z niewiadomą *n*.	$n^3-10n^2+31n-30=0$	1
	6.2	Wykorzystanie twierdzenia Bèzouta do rozkładu lewej strony równania na czynniki.	$(n-2)(n^2-8n+15)=0$	1
	6.3	Wyznaczenie pozostałych pierwiastków równania.	$n_1=3, n_2=5$	1
	6.4	Wyznaczenie pozostałych wyrazów ciągu równych zero.	$a_3=0, a_5=0$	1
7	7.1	Sporządzenie wykresu funkcji.		1
	7.2	Określenie zbioru wartości funkcji.	Y={2,5,10,17,26,37,50}	1
	7.3	Wyznaczenie argumentu dla którego wartość funkcji wynosi 37.	$x=6$	1
8	8.1	Sporządzenie odpowiednich rysunków z oznaczeniami lub opis oznaczeń.	R = 10 cm – promień kuli $2r$ = 16 cm, h = 12 cm – średnica i wysokość stożka $2r_w=\frac{8\sqrt{3}}{3}$cm - średnica walca	1
	8.2	Zastosowanie wzorów na objętość kuli, stożka do obliczenia objętości walca.	$V_W=\frac{4768}{3}p$	1
	8.3	Ułożenie równania na objętość walca z niewiadomą h_w (h_w – wysokość walca).	$\frac{16}{3}ph_W=\frac{4768}{8}p$	1
	8.4	Rozwiązanie równania.	$h_{W}=$ 298 cm	1
9	9.1	Zapisanie układu nierówności opisujących trójkąt *ABC* (w tym 2 p. za poprawne nierówności oraz 1 p. za zapisanie układu). Za dwie poprawne nierówności albo za trzy nierówności z których co najmniej jedna jest ostra o właściwych kierunkach przyznajemy 1p.	$\begin{cases} x\le 5 \\ y\ge -\frac{3}{5}x \\ y\le \frac{3}{5}x \end{cases}$	3
	9.2	Wyznaczenie długości podstawy i wysokości trójkąta *ABC*.	$\lvert CB\rvert=6, \lvert AD\rvert=5$	1
	9.3	Obliczenie pola figury *F* jako pole ΔABC.	$P=\frac{1}{2}\lvert CB\rvert\cdot\lvert AD\rvert=15$	1
10	10.1	Określenie zdarzenia losowego.	*A* – zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch żetonów o nominale 10 zł.	1
	10.2	Wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.	$\overline{\overline{\Omega}}=\binom{n+6}{2}=\frac{(n+5)(n+6)}{2}$, $n\in N_+-\{1,2\}$	1
	10.3	Wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*.	$\overline{\overline{A}}=\binom{n}{2}=\frac{(n-1)n}{2}$	1

	10.4	Wykorzystanie prawdopodobieństwa $P(A)$ do ułożenia równania.	$\frac{(n-1)n}{(n+5)(n+6)}=\frac{1}{2}$	1
	10.5	Rozwiązanie równania (w tym 1 p. za metodę z uwzględnieniem założenia oraz 1 p. za obliczenia).	$n=-2$ nie spełnia warunków zadania $n=15$ spełnia warunki zadania	2
11	11.1	Sporządzenie rysunku wraz z oznaczeniami.		1
	11.2	Wyznaczenie pola *P* podstawy ostrosłupa.	$P=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$	1
	11.3	Wykorzystanie pola podstawy do ułożenia równania z niewiadomą *a* .	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$	1
	11.4	Wyznaczenie długości *a* odcinka *AB*.	$a=2$	1
	11.5	Wyznaczenie długości h_p odcinka *OC*.	$h_p=\sqrt{3}$	1
	11.6	Wykorzystanie pola powierzchni bocznej ostrosłupa i obliczenie długości h_b wysokości ściany bocznej ostrosłupa.	$12=6h_b$ $h_b=2$	1
	11.7	Wyznaczenie miary kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.	$\cos b=\frac{h_p}{h_b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $b=30°$	1

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.